Wrocław, 29 września 2014

LISTA POWTÓRKOWA 2: NIERÓWNOśCI

1. Która z liczb jest większa $\sqrt[10]{10}$ czy $1,25$? (W rozwiązaniu wolno korzystać z własności potęgowania oraz wolno wykonywać obliczenia na liczbach naturalnych mniejszych od 200.)

2. Która z liczb jest większa 45^{13} czy 2^{72}? (W rozwiązaniu wolno korzystać z własności potęgowania oraz wolno wykonywać obliczenia na liczbach naturalnych mniejszych od 300.)

3. Dobierz odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \le \frac{\sqrt{9n+16}-3\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}} \le 2C\,.$$

4. Dobierz odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności:

$$C \le \frac{\sqrt{9n+40}-\sqrt{9n+16}}{\sqrt{4n+45}-\sqrt{4n+5}} \le 5C\,,$$

$$C \le \frac{18x^6+19x^4+20}{21x^6+20x^2+19} \le 10C\,.$$

5. Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $C < W(n) < D$.

(a) $W(n) = \dfrac{13n^2-10n+3}{2n^2+7n-1}$

(b) $W(n) = \dfrac{7^n+6^n+2^n}{7^n+5^n+3^n}$

(c) $W(n) = \sqrt{n^2+n}-n$

6. Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D oraz liczbę rzeczywistą k udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C\cdot n^k < W(n) < D\cdot n^k\,.$$

(a) $W(n) = \dfrac{5n^8-n^4+3}{5n^{10}-4}$

(b) $W(n) = \dfrac{2n^3-n^2+1}{\sqrt[3]{n^2+1}+1}$

(c) $W(n) = \dfrac{\sqrt[5]{n^2+1}}{\sqrt[7]{n^3+1}+1}$

7. Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, g udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$g-\frac{C}{n} < W(n) < g+\frac{C}{n}\,.$$

(a) $W(n) = \dfrac{4n^2-2n+3}{2n^2+7n-2}$

(b) $W(n) = \sqrt{n^2+n}-n$

Marcin Preisner [preisner@math.uni.wroc.pl] .

(c) $W(n) = \sqrt[3]{n^3 + n^2} - n$

8. Dobierz odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\left|\sqrt{n^2+1} - n - \frac{C}{n}\right| < \frac{D}{n^3}..$$

9. Dobierz odpowiednią liczbę wymierną k oraz liczby wymierne dodatnie C oraz D, a następnie udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$Cn^k \le \sqrt{4n^2+1} + \sqrt{4n^2+2} + \sqrt{4n^2+3} + \ldots + \sqrt{16n^2-1} + \sqrt{16n^2} \le Dn^k .$$

Spróbuj dobrać D i C tak, aby iloraz D/C był mniejszy od 2 (a nawet mniejszy od $3/2$).

10. W każdym z ośmiu poniższych zadań wpisz w miejscu kropek dwie kolejne liczby występujące w ciągu 0, 1, 2, 5 ,10, 100, 10^5, 10^{10}, 10^{20}, 10^{50}, 10^{100}, 10^{200}, 10^{500}, 10^{1000}, 10^{2000}, 10^{5000}, 10^{10000}, 10^{20000}, 10^{50000}, 10^{100000}, 10^{200000}, 10^{500000}, $10^{1000000}$ na kolejnych miejscach tak, aby powstały prawdziwe nierówności.

(a) $\ldots < \left(7+2\sqrt{2}\right)^{500} < \ldots$

(b) $\ldots < \left(6+3\sqrt{2}\right)^{500} < \ldots$

(c) $\ldots < \binom{1000}{3} < \ldots$

(d) $\ldots < \binom{1000}{4} < \ldots$

(e) $\ldots < 3^{2000} < \ldots$

(f) $\ldots < 35000! < \ldots$

(g) $\ldots < 2014^{2014} < \ldots$

(h) $\ldots < \sum_{n=1}^{10^{30}} n < \ldots$

11. Wskaż liczbę naturalną $n > 1$ spełniającą nierówność

$$n^{1000} < 2^n .$$

12. Udowodnij nierówność

$$n^{2^{40}} \le 3^n$$

dla wybranej przez siebie liczby naturalnej $n > 1$. (Należy wybrać jedną liczbę n spełniającą nierówność i dla tej liczby udowodnić nierówność.)

13. Dla funkcji rzeczywistych

$$f(x) = \sqrt[4]{x^2+16}, \qquad g(x) = \sqrt[8]{x^4+1}, \qquad h(x) = \sqrt[8]{x^2+10^8}$$

udowodnij nierówności

$$\left|f(x)-f(y)\right| \le \frac{|x-y|}{4}, \qquad \left|g(x)-g(y)\right| \le \frac{|x-y|}{2}, \qquad \left|h(x)-h(y)\right| \le \frac{|x-y|}{4000} .$$